Módulo 2 – Geometrias Plana e Espacial

1. Geometria Plana

Os conceitos da geometria são muito utilizados na área de logística, principalmente nas medidas das dimensões dos volumes; nos cálculos do espaço ocupado pelos lotes de cargas, do volume ocupado pelos lotes de cargas, da quantidade necessária de veículos para transportar um determinado lote e no de frete e tarifas de armazenagem.

A geometria está apoiada sobre alguns postulados, axiomas, definições e teoremas, sendo que essas definições e esses postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema.

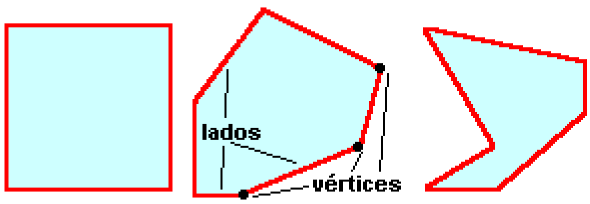
A geometria plana, também chamada geometria elementar ou Euclidiana, teve início na Grécia antiga. Essa área de estudo analisa as diferentes formas de objetos, e baseia-se em três conceitos básicos: ponto, reta e plano.

O conceito de ponto é um conceito primitivo, pois não existe uma definição aceita de ponto. Indica-se um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto (A, G, P,. . .).

A reta formada por um número infinito de pontos em seqüência. Uma reta que apenas passa por dois pontos é chamada de “reta infinita”. Caso ela comece em um ponto qualquer e não tenha fim, ela é denominada “reta semi-infinita”. Quando ela iniciar em um ponto e terminar em um outro ela é denominada de “semi-reta”. Indica-se uma reta por uma letra minúscula qualquer (r,s,t,. . .).

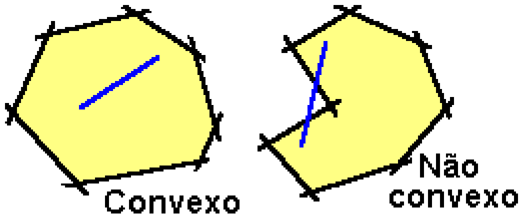
Caso existam três pontos distintos, tem-se um plano o qual contém os três pontos e todas as retas que passarem por dois destes pontos, assim como também estarão contidas no plano todas as retas paralelas às retas citadas anteriormente. Indica-se um plano por uma letra minúscula do alfabeto grego (a,b,g,. . .).

As figuras geométricas possíveis neste plano são denominadas “Polígonos”. São formadas por um número de lados maior ou igual a 3, ordenados de forma que três pontos consecutivos sejam não-colineares. Cada lado tem interseção com somente outros dois lados próximos, sendo que tais interseções são denominadas vértices do polígono e os lados próximos não são paralelos.



O Polígono Convexo é um polígono construído de modo que os prolongamentos dos lados nunca ficarão no interior da figura original. Se dois pontos pertencem a um polígono convexo, então todo o segmento tendo estes dois pontos como extremidades, estará inteiramente contido no polígono.

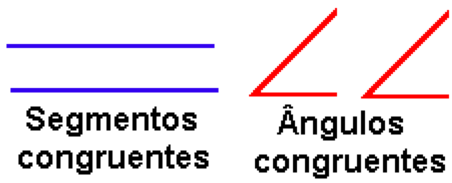
O Polígono não-Convexo é um polígono é dito não-convexo se dados dois pontos do polígono, o segmento que tem estes pontos como extremidades, contiver pontos que estão fora do polígono.



Denominação dos polígonos de acordo com o número de lados

Quantidade de Lados	Nome	Quantidade de Lados	Nome
3	Triângulo	9	Eneágono
4	Quadrilátero	10	Decágono
5	Pentágono	11	Undecágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	15	Pentadecágono
8	Octógono	20	Icoságono

Dois segmentos ou ângulos são congruentes quando têm as mesmas medidas.



Um triângulo consiste na reunião de três segmentos de reta cujas extremidades se encontram sobre pontos não-colineares. Ele pode ser classificado, em relação aos seus lados, da seguinte forma:

- ✓ Eqüilátero – Possui três lados de mesmo comprimento.
- ✓ Isósceles – Possui dois lados de mesmo comprimento.
- ✓ Escaleno – Possui três lados de comprimentos diferentes.

E quanto aos seus ângulos:

- ✓ Retângulo - possui um ângulo de 90° graus, também chamado ângulo reto.
- ✓ Obtusângulo - possui um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo com mais de 90°.
- ✓ Acutângulo - possui três ângulos agudos, ou seja, menores do que 90°.

Chama-se “lado oposto” a um certo ângulo interno do triângulo, ao segmento de reta que une os outros dois ângulos do triângulo. Lados adjacentes a um ângulo são os segmentos de reta que partem deste ângulo.

Um Paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Pode-se mostrar que num paralelogramo:

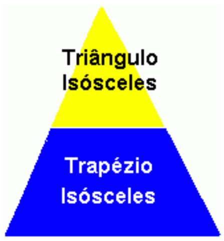
1. Os lados opostos são congruentes;
2. Os ângulos opostos são congruentes;
3. A soma de dois ângulos consecutivos vale 180°;
4. As diagonais cortam-se ao meio.

Um Losango é um paralelogramo que tem todos os quatro lados congruentes. As diagonais de um losango formam um ângulo de 90º.

Um Retângulo é um paralelogramo com quatro ângulos retos e dois pares de lados paralelos.

O Quadrado é um paralelogramo que é ao mesmo tempo é um losango e um retângulo. O quadrado possui quatro lados com a mesma medida e também quatro ângulos retos.

O Trapézio é um quadrilátero que só possui dois lados opostos paralelos com comprimentos distintos, denominados base menor e base maior. Pode-se mostrar que o segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e o seu comprimento é a média aritmética das somas das medidas das bases maior e menor do trapézio.

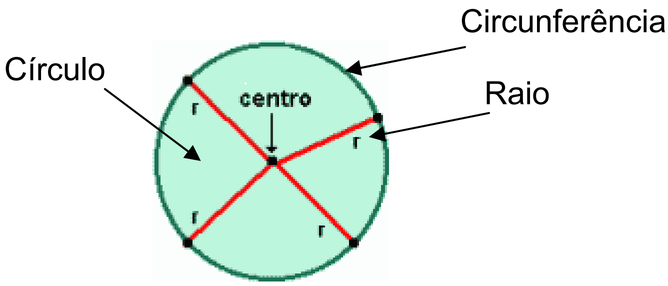


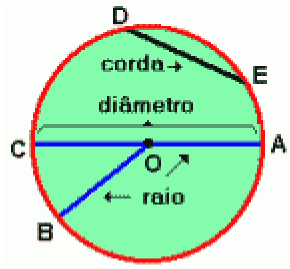
O Trapézio Isósceles é um trapézio cujos lados não paralelos são congruentes. Neste caso, existem dois ângulos congruentes e dois lados congruentes. Este quadrilátero é obtido pela retirada de um triângulo isósceles menor superior (amarelo) do triângulo isósceles maior.

A Circunferência possui características não comumente encontradas em outras figuras planas, como o fato de ser a única figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente. A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância *r* de um ponto fixo denominado o centro da circunferência.

O Círculo ou disco é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo *O* é menor ou igual que uma distância *r* dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No gráfico acima, a circunferência é a linha de cor verde-escuro que envolve a região verde, enquanto o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência.

O Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência.





A Corda de um a circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência.

O Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência.

2. Cálculos de Área e de Perímetro

Forma	Círculo	Triângulo	Trapézio	Paralelogramo
Área	$A = \pi.r^2 = (\pi.D^2)/4$	$A = (b.h) / 2$	$A = [(b_1 + b_2).h] / 2$	$A = b.h$
Perímetro	$P = 2\,\pi.r$	$P = \Sigma\, a$	$P = \Sigma\, b + \Sigma\, a$	$P = \Sigma\, a$

Forma	Retângulo	Losango	Quadrado	Polígono Regular
Área	$A = b.h$	$A = (d_1.d_2) / 2$	$A = a^2$	$A = (a.P) / 2$
Perímetro	$P = \Sigma\, a$	$P = \Sigma\, a$	$P = 4.a$	$P = \Sigma\, a$

Sendo: b = base; b_n = base *n*; h = altura; a = lado; r = raio; D = diâmetro; A = área; P = perímetro; d_n = diagonal *n*.

3. Geometria Espacial

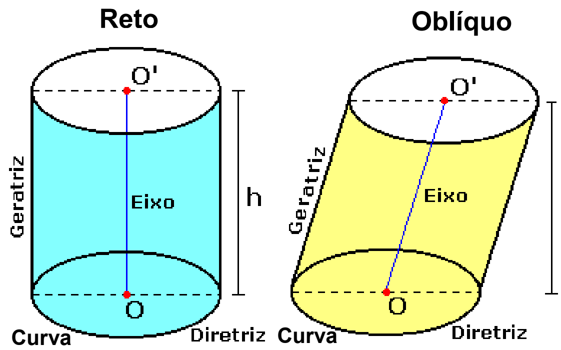
A Geometria espacial funciona como uma ampliação da Geometria plana. Ela trata dos métodos apropriados para o estudo de objetos espaciais assim como a relação entre esses elementos. Os objetos primitivos do ponto de vista espacial, são: pontos, retas, segmentos de retas, planos, curvas, ângulos e superfícies.

Um plano é um subconjunto do espaço R^3 de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto, podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contido no conjunto.

Um plano no espaço R^3 pode ser determinado por qualquer uma das situações:

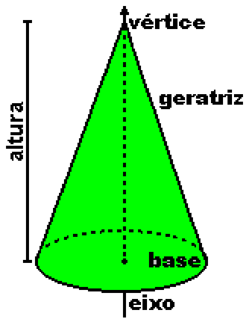
- ✓ Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta).
- ✓ Um ponto e uma reta ou um segmento de reta que não contém o ponto.
- ✓ Um ponto e um segmento de reta que não contém o ponto.
- ✓ Duas retas paralelas que não se sobrepõe.
- ✓ Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe.
- ✓ Duas retas concorrentes (elas têm um ponto em comum, ou seja, se interceptam).
- ✓ Dois segmentos de reta concorrentes.

Cilindro Circular:



Volume = área da base . h
Se a base é um círculo de base *r* então o Volume = $\pi \cdot r^2 \cdot h$ (r = raio da base)

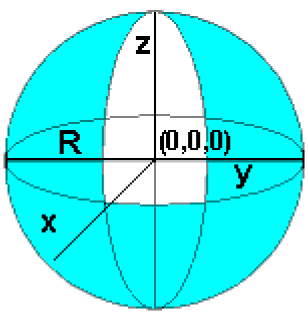
Cone:



Um cone é dito reto quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é oblíquo caso contrário. Um cone circular reto é um cone eqüilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular eqüilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.

Volume = $(\pi \cdot r^3 \sqrt{3}) / 3$ (r = raio da base)

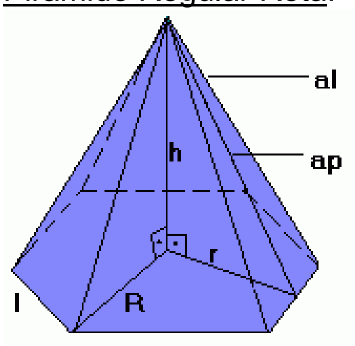
Esfera:



A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância denominada raio de um ponto fixo chamado centro. Do ponto de vista prático, a esfera pode ser pensada como a película fina que envolve um sólido esférico.

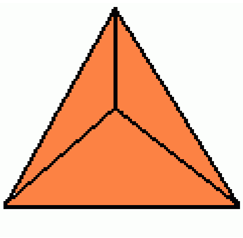
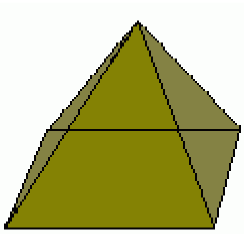
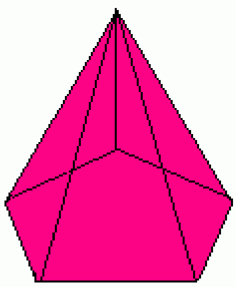
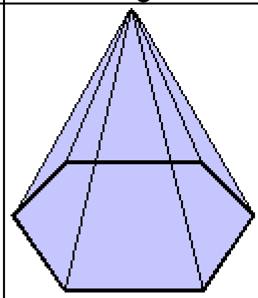
Volume = $(4 \cdot \pi \cdot R^3) / 3$

Pirâmide Regular Reta:



R	raio do circulo circunscrito
r	raio do círculo inscrito
l	aresta da base
ap	apótema de uma face lateral
h	altura da pirâmide
al	aresta lateral

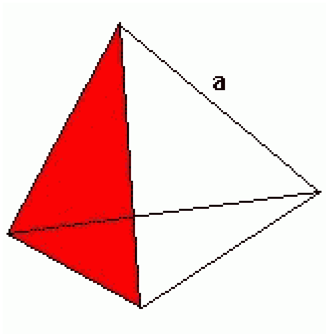
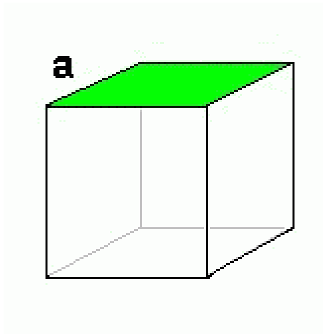
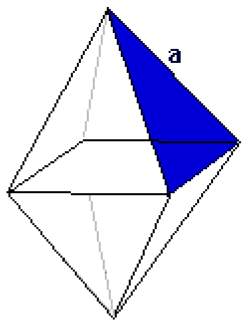
Volume = (área da base . altura) / 3
Tipos de Base da Pirâmide

Nome	Triangular	quadrangular	pentagonal	hexagonal
Forma				
Base	triângulo	quadrado	pentágono	hexágono

Poliedro Regular:

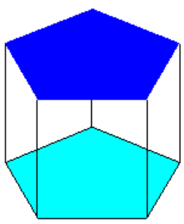
Um Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço R^3. As regiões planas que limitam este sólido são as faces do poliedro. As interseções das faces são as arestas do poliedro. As interseções das arestas são os vértices do poliedro. Cada face é uma região poligonal contendo *n* lados.

Um poliedro é regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com *n* lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice.

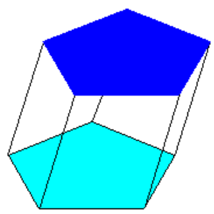
Tetraedro	Hexaedro (cubo)	Octaedro
		

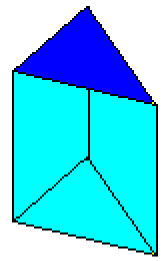
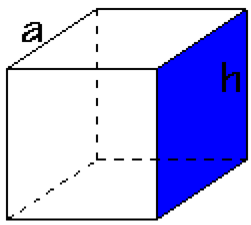
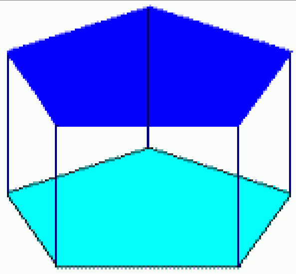
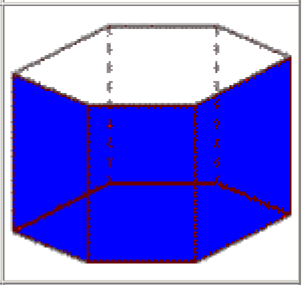
Poliedro regular	**Volume**
Tetraedro	$(1/12)\ a^3 \sqrt{2}$
Hexaedro	a^3
Octaedro	$(1/3)\ a^3 \sqrt{2}$
Dodecaedro	$(1/4)\ a^3 (15+7\cdot\sqrt{5})$
Icosaedro	$(5/12)\ a^3 (3+\sqrt{5})$

Prisma:



Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.
Quanto à base, os prismas mais comuns são:



Nome	Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
Forma				
Base	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono

Volume = área da base . h

4. Vetores em R^2

Um vetor (geométrico) no plano R^2 é uma classe de objetos matemáticos (segmentos) com a mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo (intensidade).

1. A direção é a da reta que contém o segmento.
2. O sentido é dado pelo sentido do movimento.
3. O módulo é o comprimento do segmento.

Uma quarta característica de um vetor é formada por dois pares ordenados: o ponto onde ele começa (origem) e um outro ponto onde ele termina (extremidade) e as coordenadas do vetor são dadas pela diferença entre as coordenadas da extremidade e as coordenadas da origem.

A soma de dois vetores v=(a,b) e w=(c,d)é dada por v + w = (a+c,b+d)

Propriedades da soma de vetores

- ✓ Fecho: para quaisquer u e v de R^2, a soma u+v está em R^2.
- ✓ Comutativa: Para todos os vetores u e v de R^2. v + w = w + v
- ✓ Associativa: Para todos os vetores u, v e w de R^2: u + (v + w) = (u + v) + w
- ✓ Elemento neutro: Existe um vetor Ø=(0,0) em R^2 tal que para todo vetor u de R^2, se tem: Ø + u = u
- ✓ Elemento oposto: Para cada vetor v de R^2, existe um vetor -v em R^2 tal que: v + (-v) = Ø

Ponto médio de um segmento

Dado um segmento de reta, cujas extremidades são também as extremidades dos vetores v1 = (x1,y1) e v2 = (x2,y2), o ponto médio deste segmento é dado por m=(x,y) onde:

$$x=(x1+x2)/2 \quad e \quad y=(y1+y2)/2$$

Centro de gravidade de um triângulo

Tomam-se os vértices de um triângulo como as extremidades dos vetores $v1=(x1,y1)$, $v2=(x2,y2)$ e $v3=(x3,y3)$. O centro de gravidade deste triângulo é dado pelo vetor $g=(x,y)$ onde

$$x=(x1+x2+x3)/3 \quad e \quad y=(y1+y2+y3)/3$$

Diferença de vetores

Se $v=(a,b)$ e $w=(c,d)$, define-se a diferença entre v e w, por $v-w = (a-c,b-d)$

Produto por escalar

Se $v=(a,b)$ é um vetor e k é um número real, define-se a multiplicação de k por v, por: $k.v = (ka,kb)$

Propriedades do produto de escalar por vetor

Quaisquer que sejam a e b escalares, v e w vetores:

- ✓ $1 v = v$
- ✓ $(ab) v = a (b v) = b (a v)$
- ✓ Se $a v = b v$ e v é um vetor não nulo, então $a = b$.
- ✓ $a (v + w) = a v + a w$
- ✓ $(a + b) v = a v + b v$

Módulo de um vetor

O módulo ou comprimento do vetor $v=(a,b)$ é um número real não negativo, definido por:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vetor unitário: é um vetor que tem o módulo igual a 1.

Produto Escalar

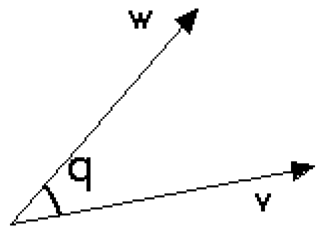
Dados os vetores $v=(a,b)$ e $w=(c,d)$, define-se o produto escalar ou produto interno entre os vetores v e w, como o número real obtido por: $v.w = a.c + b.d$

Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam os vetores, u, v e w e k escalar:

- ✓ $v.w = w.v$
- ✓ $v.v = |v|\,|v| = |v|^2$
- ✓ $u.(v+w) = u.v + u.w$
- ✓ $(kv).w = v.(kw) = k(v.w)$
- ✓ $|kv| = |k||v|$
- ✓ $|u.v|<|u||v|$ (desigualdade de Schwarz)
- ✓ $|u+v|<|u|+|v|$ (desigualdade triangular)

Outra forma de escrever o produto escalar entre os vetores v e w é v.w=|v||w|cos(q) onde “q” é o ângulo formado entre v e w.



Pode-se obter o ângulo “q” entre dois vetores quaisquer v e w por $\cos(q) = \frac{u.v}{|u||v|}$,desde que nenhum dos vetores seja nulo. Neste caso 0<q<pi=3,1416...

<u>Vetores Ortogonais</u>

Dois vetores v e w são ortogonais se v.w = 0.

<u>Vetores Paralelos</u>

Dois vetores v e w são paralelos se existe uma constante real k diferente de zero, tal que: v = k w

5. Bibliografia

Sodré, Ulysses, Geometria Plana e Seus Elementos, Capturado de http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geom-elem/geometr.htm, Disponível em 29/12/2005, 2004.