ÁLGEBRA LINEAR[1]

1 – EQUAÇÕES LINEARES

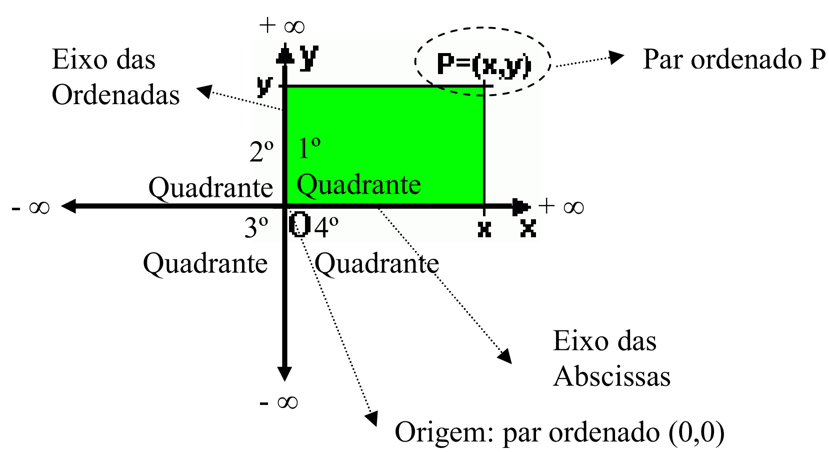
Uma equação linear segue a seguinte forma: $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + ... + a_{1n}\, x_n = b_1$

Considerando-se que:

- ✓ $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas;
- ✓ $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ são os coeficientes (<u>números reais ou complexos</u>);
- ✓ b_1 é o termo independente (<u>número real ou complexo</u>).

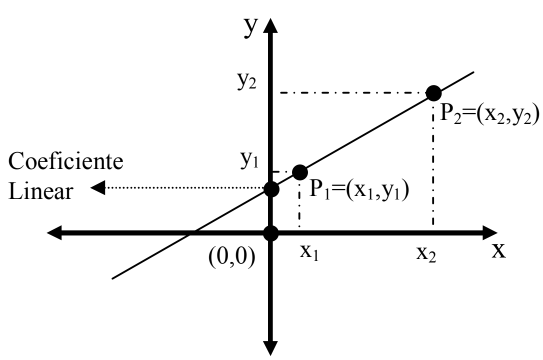
Exemplo de equação linear	**Exemplos de equações não-lineares**
$3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 20$	$12x + 4y + \sqrt{x} = -4$
$3x - 2y + 6z = 7$	$23x^2 + 4y^2 = 19$
$-2x + 4z = 3t - y + 4$	$6x + 3y - 3zw = 0$

Antes de se tratar os sistemas de equações lineares é importante ver-se como uma reta pode ser observada em um plano cartesiano. A figura a seguir expõe resumidamente um plano cartesiano.



Veja uma reta expressa pela sua equação reduzida $y = k\,x + w$, sendo k o seu coeficiente angular e w o coeficiente linear. Tomando-se dois pares ordenados, $P1=(x_1,y_1)$ e $P2=(x_2,y_2)$, sendo que $x_1 \neq x_2$, que estão sobre a reta, pode-se calcular o seu coeficiente angular por $k = \Delta y \div \Delta x$, ou seja,

$$k = (y_2-y_1) \div (x_2-x_1)$$



[1] Baseado em Haetinger, Claus e Dullius, Madalena, Álgebra Linear e Geometria Analítica, UNIVATES - Centro Universitário - Centro III, Lajeado – Rio Grande do Sul, 2006. Complementos capturados de http://www.expoente.com.br/professores/kalinke/estudo/sistemas_lineares.htm, http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/sistemas.htm, http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/determinantes.htm e http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq1g/eq1g.htm

2– SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$com\ a_{ij} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$

Uma solução do sistema anterior é uma *n-upla* de números (x_1; x_2;...;x_n) que satisfaz simultaneamente as *m* equações.

Pode-se reescrever este sistema A . x = b por um conjunto de matrizes conforme a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz *A*, dos **coeficientes das incógnitas**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz *X* (vetor), das **incógnitas**:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz *B* (vetor), dos **termos independentes**:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemplos:

SPD: Duas retas com ponto de interseção (x,y).

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

Solução: (3, -2). **Confirmar de forma gráfica**

SPI: Duas retas paralelas e sobrepostas.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{cases}$$

Solução: Existem infinitos pontos que satisfazem a ambas (pertencem as duas retas). **Confirmar de forma gráfica**

SI: Duas retas paralelas.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

3 – SISTEMA DE INEQUAÇÕES LINEARES

Uma inequação é uma condição onde os dois membros são comparados por um sinal de desigualdade. Esses sinais são:

$<$	menor
$>$	maior
$<$	menor ou igual
$>$	maior ou igual

Salientam-se os seguintes princípios de equivalência:

- ✓ Multiplicando-se os membros de uma inequação por um número positivo, obtém-se uma inequação equivalente.
- ✓ Multiplicando-se os membros de uma inequação por um número negativo, obtém-se uma inequação equivalente desde que se lhe mude o sentido.
- ✓ Somando-se ou subtraindo-se um número em ambos os membros, obtém-se uma inequação equivalente.

Exemplos:

A) Resolva a inequação a seguir:

Passo 1	$2x + 2 < 14$
Passo 2	$2x < 14 - 2$
Passo 3	$2x < 12$
Passo 4	$x < 6$

O conjunto solução é formado por todos os números inteiros positivos menores do que 6, ou seja, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

B) Para determinar todos os números inteiros positivos considerando-se as duas desigualdades segundo a expressão: $12 < 2x + 2 < 20$, faz-se:

Passo 1	12	$<$	$2x + 2$	$<$	20	Equação original
Passo 2	$12 - 2$	$<$	$2x + 2 - 2$	$<$	$20 - 2$	Subtraímos 2 de todos os membros
Passo 3	10	$<$	$2x$	$<$	18	Dividimos por 2 todos os membros
Passo 4	5	$<$	x	$<$	9	Solução

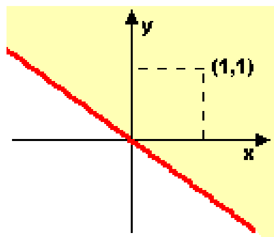
O conjunto solução é S = {6, 7, 8}

No caso onde existam duas variáveis pode-se resolver a equação pelo artifício gráfico.

Exemplos:

A) $2x + 3y \geq 0$.
Inicialmente faz-se $2x + 3y = 0$ para traçar-se a reta (em vermelho). Para se obter a área (em amarelo) que representa a inequação verifica-se, <u>por exemplo</u>, se um ponto qualquer, neste caso (1,1), pertence a área.

$2.1 + 3.1 \geq 0 \ldots 5 \geq 0$
É verdadeiro, então o ponto 1,1 está contido na área da inequação.



B) Para um <u>sistema de inequações</u> dado por:

$$\begin{cases} 2x + 3y > 6 \\ 5x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

Chega-se a seguinte solução gráfica: