MÓDULO 3 - PROBLEMAS DE TRANSPORTE

1. PROBLEMA CLÁSSICO DE TRANSPORTE

O Problema de Transporte constitui uma das principais aplicações da PL para auxiliar o planejamento e a operação de transportes. O Problema pode ser formulado inicialmente da seguinte forma:

Considerando-se o transporte de produtos de *m* origens, onde estão estocados, para *n* destinos, onde são necessários. Conhecendo-se os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino (C_{ij} – custo unitário de transporte da origem i para o destino j), deve-se decidir quanto transportar de cada origem para cada destino (X_{ij} – quantidade a ser transportada da origem i para o destino j), de modo gastar o menos possível, ou seja, minimizar o custo total de transporte. Cada uma das origens é dotada de a_i unidades disponíveis e, cada um dos destinos requer b_j unidades, todos inteiros e positivos. Considerar-se-á inicialmente que a oferta total é igual a demanda total, isto é:

$$\sum_{1}^{m} a_i = \sum_{1}^{n} b_j$$

O modelo matemático para este problema pode ser expresso da seguinte forma:

Minimizar: $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Sujeito a:
$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad (i = 1,\ldots,m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

Com: todos os X_{ij} não negativos e inteiros

Este modelo matemático pode ser representado em forma de tabular conforme exposto na tabela 1.1.

Tabela 1.1 - Representação do Problema de Transporte

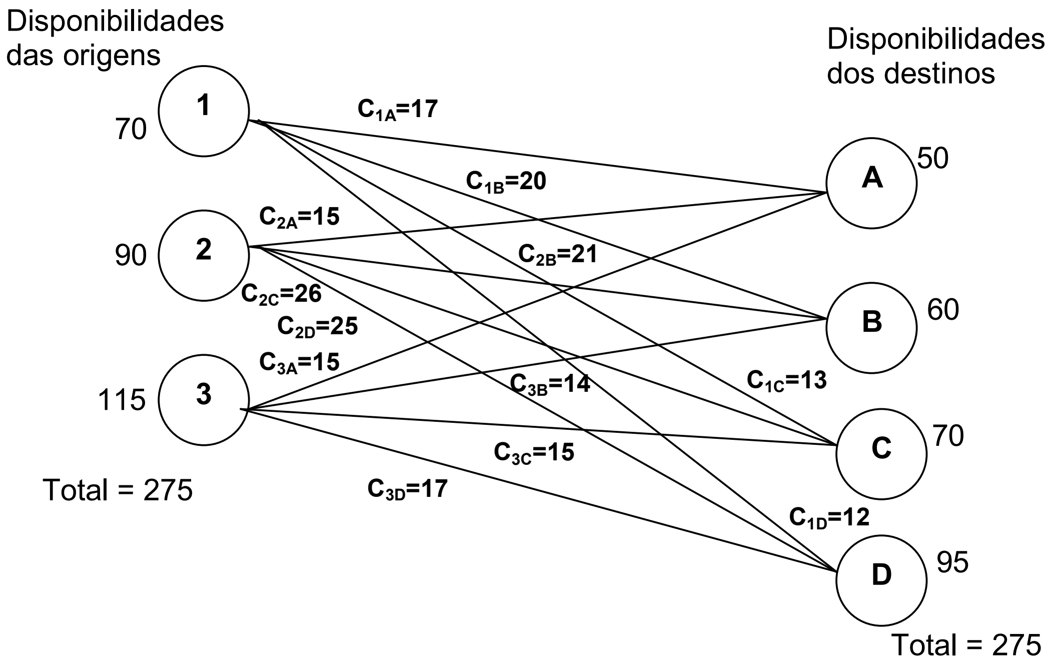
		DESTINOS					
		1	2	3	...	n	Oferta
ORIGENS	1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
	2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
	...	...	...	...	...	...	...
	m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
	Demanda	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Exemplo: Uma empresa tem fábricas em três locais diferentes, que abastecem quatro armazéns distantes uns dos outros. As capacidades das fábricas em um certo período de tempo são 70, 90 e 115 e as necessidades dos armazéns, no mesmo período de tempo, são 50, 60, 70 e 95. Os custos unitários para cada encaminhamento fábrica-armazém estão expostos na tabela a seguir.

Tabela 1.2 - Tabela dos custos unitários de transporte das origens para os destinos

		Destinos			
		A	B	C	D
Origens	1	17	20	13	12
	2	15	21	26	25
	3	15	14	15	17

Figura 1.1 - Representação gráfica do problema



A solução dos Problemas de Transporte passa por quatro etapas:

1. Determinação de uma solução inicial básica;
2. Teste de solução quanto à condição de ótimo;
3. Melhoria da solução quando não é ótima;
4. Repetição das etapas 2 e 3 até se obter a solução ótima.

1.1. Métodos para determinação da Solução Inicial

1.1.1. Método do Canto Noroeste

Começando-se pela célula superior esquerda (canto noroeste), aloca-se a X_{11} tantas unidades quantas sejam possíveis, sem violar as restrições. Isto corresponderá ao menor dos dois valores a_1 e b_1. Após, continua-se o algoritmo deslocando-se para a célula imediatamente à direita se ainda restar alguma oferta ou, caso contrário, para a célula imediatamente abaixo. A cada etapa aloca-se à célula em consideração, tantas unidades quantas sejam possíveis sem violar as restrições: a soma das alocações da linha i não pode exceder o valor de a_i, a soma da coluna j não pode exceder o valor de b_j e nenhuma alocação pode ser negativa.

Exemplo 2: Utilizando-se os dados do exemplo1, determinar uma solução inicial utilizando o método do Canto Noroeste.

	A	B	C	D	Oferta
1	17 **50**	20 **20**	13	12	70
2	15	21 **40**	26 **50**	25	90
3	15	14	15 **20**	17 **95**	115
Demanda	50	60	70	95	

1.1.2. Método de Vogel ou Método das Penalidades

O método funciona da seguinte forma:

1. Calcula-se a penalidade para cada uma das linhas e colunas. Escolhe-se a linha ou coluna que apresenta a maior penalidade. Caso haja mais de uma, escolhe-se qualquer uma delas;
2. Aloca-se o máximo possível de quantidade para a célula de menor custo da linha ou coluna escolhida no passo anterior. Isso tornará a disponibilidade da linha ou coluna a qual tal célula pertence, igual a zero. Eliminar esta linha ou coluna do restante do processo e
3. Repetir os passos 1 e 2 até que todos os transportes tenham sido realizados

Considera-se "penalidade de uma linha ou coluna" a diferença positiva entre os dois custos de menor valor na linha ou coluna.

Exemplo 3: Utilizando-se os dados do exemplo1, determinar uma solução inicial utilizando o método de Vogel.

Conforme descreve o primeiro passo, deve-se calcular as penalidades e identificar as maiores.

	A	B	C	D	Oferta	**Penalidade**
1	17	20	*13*	*12*	70	**1** ***(13-12)***
2	*15*	*21*	26	25	90	**6** ***(21-15)***
3	*15*	*14*	15	17	115	**1** ***(15-14)***
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	**0** ***(15-15)***	**6** ***(20-14)***	**2** ***(15-13)***	**5** ***(17-12)***		

As maiores penalidades estão na linha 2 e na coluna B, pois essas obtiveram penalidades iguais a seis. Deve-se então escolher entre a linha ou a coluna, pois as pontuações são iguais. Optou-se pela linha 2. Nesta linha, a célula de menor custo é a que corresponde à coluna A (quinze). Aloca-se, portanto, 50 para tal célula e elimina-se a coluna A dos passos seguintes. Devem-se então recalcular as penalidades.

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	*17*	*20*	*13*	*12*	70	1 *(13-12)*
2	*15* **50**	*21*	26	25	90	4 *(25-21)*
3	*15*	*14*	15	17	115	1 *(15-14)*
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 *(15-15)*	6 *(20-14)*	2 *(15-13)*	5 *(17-12)*		

A coluna B apresenta a maior penalidade (seis). Nesta coluna, a célula de menor custo é a que corresponde à linha 3 (custo igual a 14). Aloca-se, portanto, 60 para tal célula e elimina-se a coluna B dos passos seguintes.

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	*13*	*12*	70	1 *(13-12)*
2	*15* 50	*21*	26	25	90	1 *(26-25)*
3	*15*	*14* **60**	15	17	115	2 *(17-15)*
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 *(15-15)*	6 *(20-14)*	2 *(15-13)*	5 *(17-12)*		

As tabelas a seguir representam os passos seguintes até que todos os transportes estejam finalizados.

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	*13*	*12* **70**	70	1 *(13-12)*
2	*15* 50	*21*	26	25	90	1 *(26-25)*
3	*15*	*14* 60	15	17	115	2 *(17-15)*
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 *(15-15)*	6 *(20-14)*	11 *(26-15)*	8 *(25-17)*		

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	*13*	*12* 70	70	1 *(13-12)*
2	*15* 50	*21*	26	25	90	1 *(26-25)*
3	*15*	*14* 60	15 **55**	17	115	2 *(17-15)*
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 *(15-15)*	6 *(20-14)*	26 *(26)*	25 *(25)*		

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	*13*	*12* 70	70	1 *(13-12)*
2	*15* 50	*21*	26 **15**	25	90	1 *(26-25)*
3	*15*	*14* 60	15 55	17	115	2 *(17-15)*
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 *(15-15)*	6 *(20-14)*	26 *(26)*	25 *(25)*		

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	*13*	*12* 70	70	1 *(13-12)*
2	*15* 50	*21*	26 15	25 **25**	90	1 *(26-25)*
3	*15*	*14* 60	15 55	17	115	2 *(17-15)*
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 *(15-15)*	6 *(20-14)*	26 *(26)*	25 *(25)*		

A solução final está expressa na tabela a seguir:

Tabela 2.3 - Solução Inicial

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12 **70**	70
2	15 **50**	21	26 **15**	25 **25**	90
3	15	14 **60**	15 **55**	17	115
Demanda	50	60	70	95	

2.2. Evolução para a Solução Ótima

Determinada a solução inicial, necessita-se verificar se esta pode ser melhorada. Por intermédio da tabela 2.3 que representa a solução inicial, devem-se identificar as variáveis básicas e não básicas. As primeiras são identificadas pelas células que têm valores alocados e as segundas, o inverso.

Observa-se na tabela 2.3 que as variáveis básicas são: 1D, 2A, 2C, 2D, 3B e 3C. As variáveis não básicas são: 1A, 1B, 1C, 2B, 3A e 3D. A seguir serão descritos os passos para avaliação da existência de uma solução melhorada.

1º passo: devem-se calcular os pesos para todas as linhas e as colunas, considerando que a soma entre os pesos de cada linha e de cada coluna é igual ao custo alocado na respectiva célula (linha x coluna). Inicialmente atribui-se zero à uma linha ou coluna (geralmente a primeira linha) que contenha uma variável básica. O exemplo a seguir demonstra a alocação deste peso na linha 1 coluna D (célula com custo 12).

	A	B	C	D	Oferta	**Pesos**
1	17	20	13	**12** 70	70	**0**
2	15 50	21	26 15	25 25	90	
3	15	14 60	15 55	17	115	
Demanda	50	60	70	95		
Pesos				***12***		

Os próximos pesos terão a mesma seqüência de cálculo, conforme expresso na próxima tabela.

	A	B	C	D	Oferta	**Pesos**
1	17	20	13	12 70	70	0
2	15 50	21	26 15	**25** 25	90	***13***
3	15	14 60	15 55	17	115	
Demanda	50	60	70	95		
Pesos				***12***		

Seguindo esta forma de cálculo chega-se a seguinte tabela de pesos:

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12 70	70	0
2	15 50	21	26 15	25 25	90	13
3	15	14 60	15 55	17	115	2
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	12	13	12		

2º passo: utilizando-se os valores dos pesos, calcula-se para cada variável não básica a quantidade expressa pela seguinte fórmula:

Custo (linha x coluna) - peso da linha - peso da coluna

Calculando-se para a primeira variável não básica (1A), temos o seguinte resultado:

$$Custo_{1A} - Peso_{1} - Peso_{A} = 17 - 0 - 2 = 15$$

Para as demais linhas x colunas os resultados são:

	A	B	C	D
1	17-0-2=15	20-0-12=8	13-0-13=0	
2		21-13-12=-4		
3	15-2-2=11			17-2-12=3

Se todas as quantidades calculadas forem não negativas, a solução presente é a ótima. Caso alguns dos valores forem negativos, deve-se utilizar como referência para o próximo passo o valor mais negativo. A célula que abriga este valor deverá ser transformada em uma variável básica no lugar de uma das variáveis básicas da última solução.

Neste caso a célula 2B obteve -4 como resultado, demonstrando a necessidade da continuidade do processo para identificação da solução ótima.

3º passo: para saber quais das variáveis básicas devem ser substituídas pela variável não básica 2B, deve-se montar um circuito de compensação entre as variáveis básicas, a partir da variável que deverá entrar e seguindo alternadamente na direção da linha e na direção da coluna, subtraindo-se e somando-se o valor de entrada (a princípio um valor X), até o retorno à variável de entrada. Com este procedimento as restrições de linha e coluna ficam satisfeitas.

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12 70	70	0
2	15 50	21 **X**	26 **15-X**	25 25	90	13
3	15	14 **60-X**	15 **55+X**	17	115	2
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	12	13	12		

4º passo: escolher para a variável que está sendo transformada em básica (que contém X) o maior valor possível, sem tornar nenhuma variável básica negativa. Esse valor corresponde ao menor valor entre as células do circuito onde o valor de entrada (X) estiver sendo subtraído. Esta nova alocação forma uma nova configuração que pode ser a solução ótima.

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12 **70**	70
2	15 **50**	21 **15**	26	25 **25**	90
3	15	14 **45**	15 **70**	17	115
Demanda	50	60	70	95	

5º passo: voltar ao passo 1 até que a solução seja ótima.

Exercício: complete o exemplo anterior seguindo os passos 1 a 5 até obter a solução ótima.

Recalculo dos pesos

	A	B	C	D	Oferta	**Pesos**
1	17	20	13	12 70	70	0
2	15 50	21 15	26	25 25	90	13
3	15	14 45	15 70	17	115	6
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	8	9	12		

Identificação da negatividade da variável não básica

	A	B	C	D
1	17-0-2=15	20-0-8=12	13-0-9=4	
2			26-13-9=4	
3	15-6-2=7			17-6-12=-1

Montagem do circuito

	A	B	C	D	Oferta	**Pesos**
1	17	20	13	12 70	70	0
2	15 50	21 15+X	26	25 25-X	90	13
3	15	14 45-X	15 70	17 X	115	6
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	8	9	12		

Recalculo dos pesos

	A	B	C	D	Oferta	**Pesos**
1	17	20	13	12 70	70	0
2	15 50	21 40	26	25	90	12
3	15	14 20	15 70	17 25	115	5
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	3	9	10	12		

Identificação da negatividade da variável não básica

	A	B	C	D
1	17-0-3=14	20-0-9=11	13-0-10=3	
2			26-12-10=4	25-12-12=1
3	15-5-3=7			

Verifica-se que não existem mais resultados negativos expressos na tabela anterior, concluindo-se que a solução ótima é:

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12 70	70
2	15 50	21 40	26	25	90
3	15	14 20	15 70	17 25	115
Demanda	50	60	70	95	

BIBLIOGRAFIA

Novaes, Antônio Galvão, **Métodos de Otimização: aplicações aos transportes**. Edgar Blücher, São Paulo, 1978.