MÓDULO 4 - TEORIA DAS FILAS (*Queueing Theory*)

Baseado em Andrade, Eduardo Leopoldino de, Introdução à pesquisa operacional, LTC - Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2000.; Albernaz, Marco Aurélio, Teoria das Filas – Apontamentos da Disciplina Pesquisa Operacional II – Pontifícia Universidade Católica – RJ, 2004 e Costa, Renato Aurélio Castro, Determinação de Estoques , Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003; Prado, Darci Santos do. Teoria das Filas e da Simulação, ISBN 85-86948-12-8, INDG Tecnologia e Serviços LTDA, Belo Horizonte, 2004.

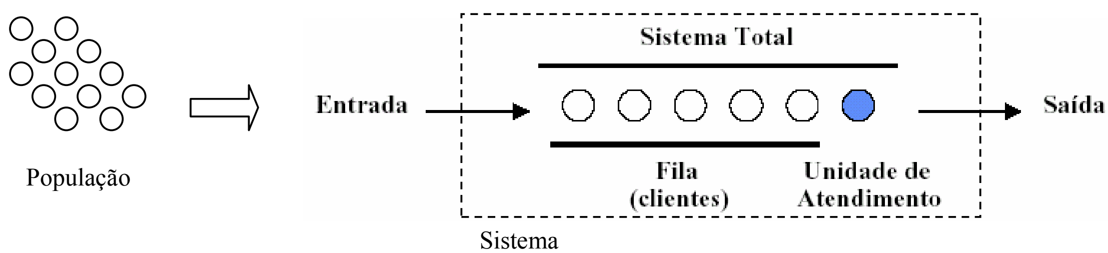
1. INTRODUÇÃO

A abordagem matemática das filas se iniciou em 1908, na cidade de Copenhague, Dinamarca. O pioneiro da investigação foi o matemático Agner Krarup Erlang (1909), quando trabalhava numa companhia telefônica, estudando o problema de redimensionamento de centrais telefônicas. Somente a partir da Segunda Guerra Mundial que a teoria foi aplicada a outros problemas de filas. Seu trabalho foi difundido por outros pesquisadores em diversos países europeus. Na década de 30, dentre as pesquisas nesta área, Andrey Kolmogorov, na Rússia, estudava um sistema com entrada de probabilidade de Poisson (Siméon Denis Poisson) e saída arbitrária em único ou múltiplo atendente.

A Teoria das Filas é uma das técnicas da Pesquisa Operacional, que trata de problemas de congestionamentos de sistemas, onde clientes solicitam alguns tipos de serviços. Esses serviços são limitados por restrições intrínsecas do sistema, que, devido a isso, podem causar filas.

Para melhor entendimento de um sistema de filas e seus componentes pode-se visualizar a figura 1 a seguir.

Fig.1. Exemplo de fila com seus componentes



Existem vários exemplos reais de sistemas de filas. Como forma de ilustração a tabela 1 lista quatro exemplos.

Tab.1. Exemplos de Sistemas de Filas

Situação	Processo de Entrada	Processo de Saída
Banco	Usuários chegando ao banco	Usuário atendido pelo caixa
Atendimento em pizzaria	**Pedido para entrega de pizza para o cliente**	**Pizzaria envia pizzas**
Banco de Sangue	Chegada de bolsa com sangue	Bolsa usada por paciente
Estaleiro de Navios	**Navio necessitando reparo é enviado para o estaleiro**	**Navio reparado volta para o mar**

2.DEFINIÇÕES IMPORTANTES

A seguir serão definidos alguns componentes e variáveis importantes para compreensão sobre os sistemas de filas.

- Tamanho da população - Tamanho do grupo que fornece os clientes. Para tamanhos maiores que 30, geralmente, considera-se que a população é infinita, ou ainda, que a chegada de um cliente não afetará significativamente a probabilidade da chegada de outro cliente. Quando a população for pequena, ou seja, menor que 30, o efeito existe e pode ser considerável.
- Clientes e Tamanho da População – São unidades da população que chegam para o atendimento, como por exemplo, pessoas, peças, máquinas, navios, automóveis etc..
- Fila (linha de espera) - Número de clientes esperando atendimento. Não inclui o cliente que está sendo atendido;
- Unidade de atendimento - Processo ou sistema que realiza o atendimento do cliente. Pode ser unidade única ou múltipla;
- Taxa de chegada dos clientes - Taxa (número de clientes / unid. tempo) segundo a qual os clientes chegam para serem atendidos. O valor médio da taxa de chegada é representado por λ (lambda). Como é raro um processo onde taxa de chegada dos clientes seja regular, ou seja, não existe nenhuma variação entre os valores para os intervalos entre chegadas, são adotadas distribuições de freqüência (normal, Poisson, exponencial etc.) para representar o processo. O mesmo modelo com distribuição normal pode diferir significativamente em termos de resultado do que com uma distribuição de Poisson;
- Taxa de atendimento dos clientes - Taxa (número de clientes / unid. tempo) segundo a qual um canal de atendimento ou servidor pode efetuar o atendimento de um cliente. O valor médio da taxa de atendimento é μ (mu). É importante ressaltar que o valor desta taxa é considerado como se o servidor estivesse ocupado 100% do seu tempo. Como há tempo ocioso, a distribuição de freqüência (normal, Poisson, exponencial etc.) deste valor é igualmente importante na determinação do grau de complexidade matemática. O pressuposto mais comum é a distribuição de Poisson, porém exige que os eventos de chegada e atendimento sejam completamente independentes. Em todos os casos, os resultados são valores médios ou esperados e supõe-se que as taxas se mantêm constantes ao longo do tempo. De fato, isto pode não ser verdade, uma vez que podem ocorrer alterações no processo tão logo a fila assuma um valor muito alto;
- Disciplina da Fila - Método de decidir qual o próximo cliente a ser atendido. (exemplo: FIFO-primeiro a chegar/ primeiro a ser atendido).
- Número Médio de Clientes na Fila não Vazia (NF) - Número médio de clientes que aguardam o atendimento, ou seja, é o que determina o tamanho da fila. É a característica mais relevante ao se defrontar com a opção de escolher uma fila. A meta é não ter fila, chegar e ser atendido. Supondo que os ritmos médios de chegada e atendimento sejam constantes, o tamanho da fila irá oscilar em torno de um valor médio.
- Número Médio de Clientes no Sistema (NS) - Número de clientes aguardando na fila mais os que estão sendo atendidos. Pode ser entendido também como sendo o tamanho *médio* na fila mais o número *médio* de clientes no atendimento.
- Tempo Médio que o Cliente Fica na Fila (TF) - Tempo médio de espera pelo cliente na fila esperando para ser atendido.
- Tempo Médio que o Cliente Fica no Sistema (TS) - Tempo médio de espera pelo cliente na fila esperando para ser atendido mais o tempo de atendimento. A partir do número médio de clientes no sistema ou na fila, é possível calcular o tempo médio de permanência do cliente no sistema (TS) e na fila (TF).

- A razão ρ (rho) é chamada de "Fator de Utilização do Servidor", o qual representa a fração média do tempo em que o servidor está ocupado. Este fator é a base de cálculo da probabilidade de haver um número *K* de clientes no sistema, o qual definirá o tamanho da fila e o tempo médio que os clientes permanecem nela e no sistema ($\rho = \lambda / \mu$.).

Observação Importante

Considerando-se que um observador esteja analisando um sistema de atendimento e conclua que $\mu > \lambda$, provavelmente o mesmo concluirá que não deveria haver fila naquele sistema pois, a taxa média de atendimentos do sistema (μ)é maior que a taxa média de chegadas (λ) nele. Vale lembrar que este tipo de análise seria correta se os processos de chegada e de atendimento fossem regulares. Mas, sabendo-se que esses processos são raros na vida real, chega-se a conclusão que existe um fator de aleatoriedade no sistema.
A abordagem matemática da teoria das filas exige que exista estabilidade no sistema (chegada e atendimento), ou seja $\mu > \lambda$, considerando-se com isso que μ e λ devem se manter constantes em relação ao tempo. Do contrário, devem-se utilizar modelos de simulação por computador para efetuar tais análises do sistema.

3.CONDIÇÕES DE OPERAÇÃO DO SISTEMA

Quando essas filas ultrapassam o valor estimado ou normal, pode-se concluir que o sistema está na fase de congestionamento. Nesta fase a qualidade e a produtividade do sistema decresce e o custo operacional tende a subir.

Existem diversos fatores que podem interferir no desempenho de um sistema, tais como:

- ✓ a forma de atendimento aos clientes;
- ✓ a forma da chegada dos clientes;
- ✓ a disciplina da fila e
- ✓ a estrutura do sistema.

3.1. Forma do Atendimento aos Clientes

O primeiro passo para a análise de um sistema de filas é o levantamento estatístico do número de clientes atendidos por unidade de tempo, ou do tempo gasto em cada atendimento. Este procedimento viabiliza a determinação da distribuição de probabilidade do número de atendimentos ou a duração de cada atendimento.

Por exemplo, observando-se a tabela a seguir onde está expresso o tempo de atendimento a 100 clientes, em segundos, de um certo atendente, pode-se chegar ao valor de μ.

20	22	23	18	17	15	21	20	25	26
19	20	18	17	23	22	21	21	22	23
20	23	25	17	14	15	22	20	23	21
25	18	18	17	17	25	26	23	25	24
21	15	17	18	19	22	15	14	15	17
18	20	19	18	20	22	23	24	25	22
22	21	23	20	21	20	23	22	21	20
24	24	25	21	23	20	19	18	17	17
18	15	14	17	13	18	19	18	19	20
18	20	18	22	24	14	24	24	23	25

A tabela a seguir expõe alguns dados importantes para a elaboração da distribuição de freqüência.

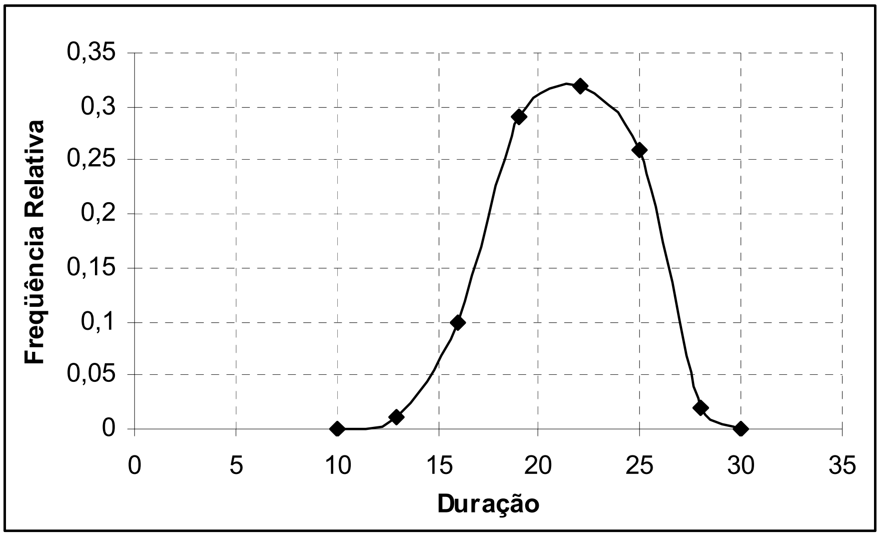
Dados Importantes		Fórmula no Excel
Menor Valor (segundos)	13	=MÍNIMO(Dados)
Maior Valor (segundos)	26	=MÁXIMO(Dados)
Nº de Atendim.	100	=CONT.VALORES(Dados)
Média (segundos / cliente)	20,19	=MÉDIA(Dados)

A média aritmética resulta no tempo médio de atendimento por cliente, ou seja, 20,19 segundos por cada cliente.
Sabendo-se que 1 minuto tem 60 segundos, chega-se ao tempo médio de atendimento por cliente de 0,3365 minuto por cliente.

Desta forma, pode-se calcular a taxa média de atendimentos: μ = 2,97 clientes por minuto (1 / 0,3365).
Os dados a seguir estão agrupados de forma que se possa avaliá-los em relação a sua distribuição em relação a média.

Faixas	Freqüência Absoluta	Fórmula no Excel	Freqüência Relativa (Probabilidade)
>10	0	={FREQÜÊNCIA(Dados;Limite Máx.Tempo)}	0
11-13	1	“	0,01
14-16	10	“	0,10
17-19	29	“	0,29
20-22	32	“	0,32
23-25	26	“	0,26
26-28	2	“	0,02
29>	0	“	0
	$\sum$ = 100		1

Observação: Para determinar a freqüência absoluta, localiza-se a célula à direita do primeiro valor (>10) para utilização do assistente de fórmulas. Marcar todas as células, incluindo-se a primeira, incluindo somente o limite máximo (10,13,16,19,22,25,28,29), selecionando-se até a última referência (29>). Pressionar “F2” para editar a fórmula e "CTRL+SHIFT+ENTER" para formação da fórmula em matriz. Pressionar “ENTER” para finalizar a edição.
Para saber-se como os valores se distribuem em torno da média necessita-se plotar os dados em um gráfico.



3.2 Forma da Chegada dos Clientes

Geralmente a chegada dos clientes a um sistema ocorre de forma aleatória. Sendo assim, necessita-se realizar um levantamento estatístico para caracterizar se o processo de chegadas pode ser representado por uma distribuição de probabilidades.

Para efetuar-se este levantamento necessita-se identificar se o processo de chegadas está no estado estacionário, sinalizando que o processo poderá ser sempre representado por este levantamento. Se o levantamento for efetuado no estado não-estacionário, ele não servirá como representante de uma situação normal.

Por exemplo, os usuários de uma agência bancária utilizam-na em um processo estacionário, mas quando da existência de uma greve bancária prolongada, o sistema poderia ser classificado como não-estacionário, pois haveria uma corrida ao banco. Essas situações seriam diferentes e influenciariam nas características da fila, o que poderia implicar em distribuições de probabilidades diferentes.

Por exemplo, observando-se a tabela a seguir onde está expresso a quantidade de veículos que chegaram a um posto de pedágio, em períodos de 1 minuto, em uma hora, pode-se chegar ao valor de λ.

2	4	5	3	3	2	1	4	4	5
2	2	1	3	4	3	4	2	3	4
1	2	4	4	3	2	2	1	1	2
3	2	5	6	6	6	3	3	5	5
5	4	5	5	2	1	1	1	2	1
1	2	2	1	3	3	2	1	3	1

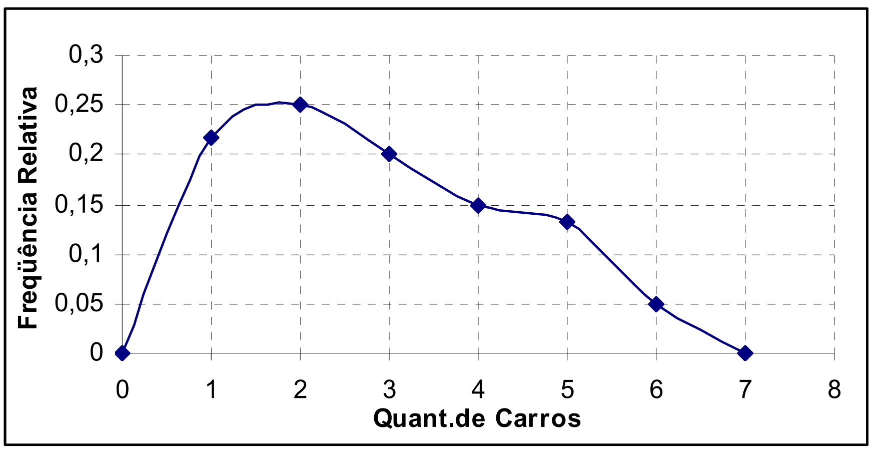
A tabela a seguir expõe alguns dados importantes para a elaboração da distribuição de freqüência.

Dados Importantes		Fórmula no Excel
Menor Valor (quant.carros)	1	=MÍNIMO(Dados)
Maior Valor (quant.carros)	6	=MÁXIMO(Dados)
Quant. Total de Veículos	173	=CONT.VALORES(Dados)
Período Total de Análise (minutos)	60	=MÉDIA(Dados)
Quant. de Carros / minuto (λ)	2,83	Total Veíc./ Total Tempo

Os dados a seguir estão agrupados de forma que se possa avaliá-los em relação a sua distribuição em relação a média.

Quant. de Carros	**Freqüência Absoluta**	**Fórmula no Excel**	**Freqüência Relativa (Probabilidade)**
0	0	={FREQÜÊNCIA(Dados;Quant.Carros)}	0
1	13	“	0,22
2	15	“	0,25
3	12	“	0,20
4	9	“	0,15
5	8	“	0,13
6	3	“	0,05
7	0	“	0
	∑ = 60		1

Para saber-se como os valores se distribuem em torno da média necessita-se plotar os dados em um gráfico.



Observa-se que esta distribuição se assemelha com a de Poisson.

3.3. Disciplina da Fila

É um conjunto de regras que impõem a ordem em que os clientes serão atendidos. O atendimento pode ser pela ordem de chegada, ou seja, o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido, pela ordem inversa de chegada, ou seja, o último a chegar é o primeiro a ser atendido, por prioridade para certas características etc..

Exemplos:
- ✓ FIFO (*First-In-First-Out*) ou FCFS (*first come, first served*): primeiro cliente a chegar à fila será o primeiro a ser atendido.
- ✓ LIFO (*Last-In-First-Out*) ou LCFS (*last come, first served*): o último cliente a chegar à fila é o primeiro a ser atendido.
- ✓ SIRO (*Service-In-Random-Order*): o atendimento dos clientes faz-se por ordem aleatória.
- ✓ SPT (*Shortest-Processing-Time first*): o cliente a ser atendido em primeiro lugar será aquele cujo tempo de atendimento é menor.

✓ PR (*Priority Rules*): o atendimento faz-se de acordo com as regras de prioridades pré-estabelecidas.

Cada Sistema de Filas pode ser descrito segundo a notação de Kendall[1] por seis características (A / B / c / K / m / Z).

A primeira característica **(A)** especifica a distribuição dos intervalos entre chegadas e a segunda característica **(B)** especifica a distribuição do tempo de serviço. Podem-se utilizar as seguintes abreviações padrões:

- M - intervalos de tempo entre chegadas são independentes, identicamente distribuídos e variáveis aleatórias, seguindo o modelo Marcoviano (distribuição exponencial negativa ou distribuição de Poisson);
- D - intervalos de tempo entre chegadas são independentes, identicamente distribuídos e determinístico (distribuição determinística);
- Em - intervalos de tempo entre chegadas são independentes, identicamente distribuídos e variáveis aleatórias tendo distribuição de Erlang de ordem "m";
- Hm - Hiper-exponencial de estágio "m";
- G - intervalos de tempo entre chegadas são independentes, identicamente distribuídos e tendo distribuição genérica.

A terceira característica **(c)** é o número de canais de atendimento ou número de servidores.

A quarta característica **(K)** especifica o número máximo (capacidade máxima) de usuários no sistema.

A quinta característica **(m)** dá o tamanho da população que usa o sistema.

A sexta característica **(Z)** descreve a disciplina da fila.

Observações:

1.Existe uma notação condensada, A/B/c, onde se supõe que não há limite para o tamanho da fila, a população é infinita e a disciplina da fila é FIFO. Para o caso de capacidade limitada, a notação utilizada é A/B/c/K.

2.Os modelos Marcovianos ou de distribuição de Poisson possuem uma grande aplicação teórica uma vez que permitem desenvolver uma teoria sobre filas. Através dele, é possível calcular todas as principais características da fila, sem necessitar efetuar dimensionamentos e estudos financeiros com base em análises mais demoradas com simulação ou uma abordagem matemática complexa. Modelos de filas com distribuições exponenciais levam a dimensionamento de sistemas com mais segurança.

Exemplos: M / E2 / 8 / ∞ / 10 / FCFS - pode ser uma clínica com 8 médicos, intervalo entre chegada de clientes exponencial, tempo de atendimento Erlang de ordem 2, disciplina da fila de atendimento por ordem de chegada, com capacidade total do sistema para 10 clientes e população infinita.

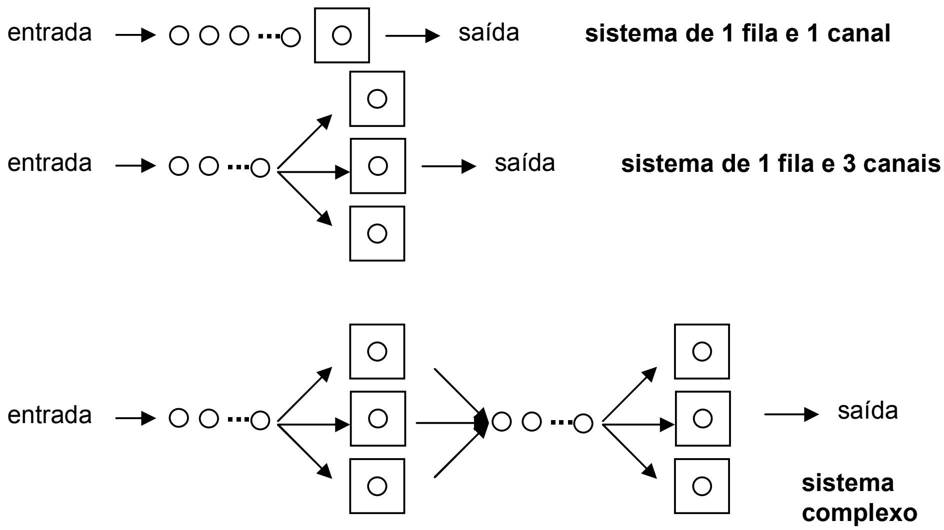
O modelo M/M/1 é conhecido como modelo de Poisson. Ele é mais utilizado em estudos teóricos, pois permite, facilmente, calcular todos os atributos de uma fila, facilitando a sua análise financeira.

---

[1] KENDALL, D.G., **Stochastic processes occurring in the Theory of Queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains**, p. 338-354 Ann. Math. Statist. 24, 1953.

3.4. Estrutura do Sistema

Existem vários tipos de estrutura do sistema, e por isso, necessitam-se ser estudados caso-a-caso. A seguir estão relacionados três exemplos de configurações.



4. MODELO DE 1 CANAL E 1 FILA COM POPULAÇÃO INFINITA (M / M / 1)

4.1. Considerações do Sistema

As equações para este modelo baseiam-se nas seguintes características:

- Formas da chegada à fila e de atendimento seguem o modelo Marcoviano (distribuição de Poisson ou a distribuição exponencial negativa) e;
- Número de canais de atendimento igual a 1.

Expressões

- ✓ Número Médio de Clientes no Sistema: $NS = \lambda / (\mu - \lambda)$
- ✓ Número Médio de Clientes na Fila: $NF = \lambda^2 / [\mu (\mu - \lambda)]$
- ✓ Número Médio de Clientes Sendo Atendidos (Fator de Utilização do Servidor):

$\rho = \lambda / \mu$

- ✓ Probabilidade de Existirem *n* Clientes no Sistema: $P(n) = (1 - \lambda / \mu) (\lambda / \mu)^n$

Teorema: Para qualquer sistema de filas, no qual exista uma distribuição em regime constante, são válidas as seguintes relações:

$$NS = \lambda\, TS \text{ e } NF = \lambda\, TF$$

Vale relembrar que sistemas estáveis são caracterizados por $\lambda < \mu$, ou seja, $\rho < 1$. Quanto mais o valor de "ρ" se aproxima de 1 a fila tende a aumentar infinitamente. Observa-se pela expressão de NF que se $\lambda = \mu$, ou seja, $\rho = 1$, o tamanho da fila é infinito.

Exemplo 1:
O número médio de carros que chegam a um posto de informações é igual a 10 carros/hora. Assumir que o tempo médio de atendimento por carro seja de 4 minutos, e ambas as distribuições de intervalos entre chegadas e tempo de serviço sejam exponenciais.

Responder as seguintes questões:
a - Qual a probabilidade do posto de informações estar livre?
b - Qual o número médio de carros esperando na fila?
c - Qual o tempo médio que um carro gasta no sistema (tempo na fila mais o tempo de atendimento) ?
d - Quantos carros serão atendidos em média por hora ?

Dados do Problema:

Chegada: $\lambda = 10$ carros/hora.
Atendimento: em média, 1 carro a cada 4 minutos, ou seja 15 carros/hora (60/4). Sendo assim, $\mu = 15$ carros/hora.

Solução:

a - $P(0) = (1 - \lambda / \mu)(\lambda / \mu)^0 = (1 - 10 / 15) \times 1 = 1 / 3 = 33{,}33\%$
b - $NF = \lambda^2 / [\mu (\mu - \lambda)] = 10^2 / 15 (15 - 10) = 1{,}33$ carros
c - Dado que $NS = \lambda\ TS$, então:
$TS = NS / \lambda = 1 / (\mu - \lambda)$ $= 1 / 5 = 0{,}2$ horas ou 12 minutos **(Atenção)**
d - Se a ocupação média do posto fosse de 100%, então, o número médio de carros atendidos por hora seria de 15 carros. Sendo a ocupação média, a 100%, igual a 1 - P(0), ou seja, igual a 2/3, então o número de carros atendidos por hora seria de:

$$15 * 2 /3 = 10 \text{ carros por hora.}$$

Exemplo 2:

Supondo-se que a chegada de um navio ao berço portuário siga a distribuição de Poisson, com uma taxa de 6 navios por dia. A duração média de atendimento dos navios é de 3 horas, seguindo-se a distribuição exponencial. Calcule os seguintes valores:

a – Qual a probabilidade de um navio chegar ao porto e não esperar para atracar?
b – Qual é a quantidade média de navios na fila do porto?
c – Qual é a quantidade média de navios no sistema portuário?
d – Qual é a quantidade média de navios utilizando o porto?
e - Qual é o tempo médio de um navio na fila?
f – Qual deve ser a taxa de chegada de um navio para que o tempo médio na fila seja de 3 horas?
g – Qual é a probabilidade do berço portuário estar em uso?

Dados do Problema:

Chegada: $\lambda = 6$ navios/dia.
Atendimento: em média, 1 navio a cada 3 horas, ou seja 8 navios/dia (24/3). Sendo assim, $\mu = 8$ navios/dia.

Solução:

a - $P(0) = (1 - \lambda / \mu)(\lambda / \mu)^0 = (1 - 6 / 8) \times 1 = 1 / 4 = 25\%$
b - $NF = \lambda^2 / [\ \mu\ (\ \mu - \lambda\ )] = 6^2 / [\ 8\ (\ 8 – 6\ )\ ] = 2{,}25$ navios
c – $NS = \lambda / (\ \mu\ - \lambda) = 6 / (\ 8 – 6\ ) = 3$ navios
d – Navios no Porto = NS – NF = 3 – 2,25 = 0,75 navio
e – TF = ?, como $NF = \lambda\ TF$ então $TF = NF/\ \lambda$, ou seja TF = 2,25 / 6 = 0,375 dia = 9 horas
f – Se TF = 3 horas = 0,125 dias (3/24), mantendo-se a mesma taxa de atendimento (μ), deve-se calcular a nova taxa de chegada (λ). Sendo assim:

Sendo $NF = \lambda^2 / [\ \mu\ (\ \mu - \lambda\ )]$ e $NF = \lambda\ TF$, então $\lambda^2 / [\ \mu\ (\ \mu - \lambda\ )] = \lambda\ TF\ \therefore$
$TF = \{\lambda^2 / [\ \mu\ (\ \mu - \lambda\ )\ ]\ \} \times 1 / \lambda = \lambda / [\ \mu\ (\ \mu - \lambda\ )\ ] = \lambda / (\ \mu^2 - \mu\lambda\ )\ \therefore$
$TF\ (\ \mu^2 - \mu\lambda\ ) = \lambda\ \ \therefore\ TF\ \mu^2 - TF\ \mu\ \lambda = \lambda\ \therefore TF\ \mu^2 = TF\ \mu\ \lambda + \lambda\ \therefore$
$\lambda\ (\ TF\ \mu + 1) = TF\ \mu^2\ \therefore\ \boxed{\lambda\ = TF\ \mu^2 / (TF\ \mu + 1)}$

$\lambda = 0{,}125 \times 8^2 / (0{,}125 \times 8 + 1) = 4$ navios / dia
g – Se a probabilidade de não ter nenhum navio no berço portuário é de 25%, então a probabilidade de ter-se um navio atracado é de 1 – P(0) = 1 – 1 / 4 = 3 / 4 = 0,75 = 75%

Exemplo 3:

Uma distribuidora de combustíveis utiliza caminhões para transportar o seu produto. Sabendo-se que esta empresa só tem um ponto de abastecimento dos caminhões, que os ritmos de chegada e de atendimento seguem as distribuições do modelo Marcoviano, que a taxa de chegada dos caminhões é de 4 unidades por hora, que a taxa de atendimento é de 5 unidades por hora, que os custos horários do funcionário que abastece o veículo é de 5,00 unidades monetárias e do motorista é de 12,00 unidades monetárias, calcule o custo horário do sistema e a probabilidade do funcionário que abastece ficar sem nenhum caminhão para abastecer.

Dados do Problema:

Chegada: $\lambda = 4$ caminhões/hora.
Atendimento: $\mu = 5$ caminhões/hora.
Custo do funcionário que abastece o caminhão: 5,00 unidades monetárias.
Custo do motorista: 12,00 unidades monetárias.

Solução:

Quantidade de Caminhões no Sistema:

NS = λ / (μ - λ) = 4 / (5 – 4) = 4 caminhões

Por hora o 1 funcionário abastece 4 caminhões, então se pode calcular o custo do sistema por:

Custo Horário do Sistema = 5,00 + (12,00 x 4) = 53,00 unidades monetárias.

Probabilidade de não ter nenhum caminhão para ser abastecido:

$P(0) = (1 - \lambda / \mu)(\lambda / \mu)^0 = (1 - 4 / 5) \times 1 = 20\%$.

ANEXO

Letras Gregas

α alfa	ι iota	σ sigma
β beta	κ kapa	τ tau
γ gama	λ lambda	υ úpsilon
δ delta	μ mu	φ fi
ε epsilon	ν nu	χ chi
ζ zeta	ξ ksi	ψ psi
η eta	ο ômicron	ω ômega
θ teta	π pi	
	ρ rho	